Egzamin z **analizy matematycznej II.1**

25 lutego 2023, 10:00 - 13:00

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.

---

1. (15p) Znaleźć kresy funkcji

$$f(x,y) = \exp\left(-\sqrt[3]{2y+2}\right)\frac{x^2(y+1)}{y+x^3+1}$$

na zbiorze $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$.

---

2. (15p+5p) Niech $g(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$.

   a) (15p) Wykazać, że g jest dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.

   b)* (+5p) Rozstrzygnąć, czy g jest klasy C^∞ na $\mathbb{R}^2$.

---

3. (15p) Niech $A \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie zbiorem $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ spełniających

$$\exp(x^2y + z^3) = 3w - x\,,$$
$$\sin(\pi(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{2}w)) = y + z\,.$$

Udowodnić, że istnieją zbiory otwarte $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz funkcja $h = (h_1, h_2) : U \to V$ klasy C^1 takie, że $(1,1) \in U$, $h(1,1) = (-1, \frac{2}{3})$ oraz

$$A \cap (U \times V) = \Big\{(x, y, h_1(x,y), h_2(x,y)) : (x,y) \in U\Big\}\,.$$

Wyznaczyć $\mathrm{D}h(1,1)$ oraz $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,1)$.

---

4. (15p)

   a) Niech $f_1, f_2, \ldots : [0,1] \to (0,\infty)$ będą funkcjami mierzalnymi i niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in [0,1]$. Czy wynika stąd, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \Big(1 + f_n(x)\Big)^{\frac{1}{f_n(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \Big(1 + f(x)\Big)^{\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\ ?$$

   b) Niech $f_1, f_2, \ldots : (0,+\infty) \to (0,1)$ będą funkcjami mierzalnymi i niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in (0,+\infty)$. Czy wynika stąd, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,+\infty)} \Big(1 - f_n(x)\Big)^{\frac{x}{f_n(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_{(0,+\infty)} \Big(1 - f(x)\Big)^{\frac{x}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\ ?$$

---

5. (15p) Wykazać, że funkcja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$\phi\Big((x_1, x_2, x_3)\Big) = \sqrt{(2x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

jest normą w $\mathbb{R}^3$. Obliczyć trójwymiarową miarę Lebesgue'a (λ_3) kuli jednostkowej w tej normie.